Outils d'aide à la décision (SY05)
— exercices 2015 —

Université de technologie de Troyes

1 Rappel probabilité

Exercice 1.

Une ville de 100 000 habitants compte trois journaux locaux : I, II et III. Les proportions de lecteurs pour ces journaux sont

I	:	10%
II	:	30%
III	:	5%
I et II	:	8%
I et III	:	2%
II et III	:	4%
I et II et III	:	1%

Ces proportions nous indiquent par exemple que 8 000 personnes lisent à la fois les journaux I et II.

1. Quel est le nombre de personnes ne lisant qu'un seul journal ?
2. Combien de personnes lisent au moins deux journaux ?
3. Le journal II est un quotidien du soir, tandis que I et III sortent le matin. Combien de personnes lisent-elles au moins un journal du matin plus celui du soir ?
4. Combien de personnes lisent-elles un seul journal du matin et le journal du soir ?

Exercice 2.

Une ville compte 5 hôtels. Trois personnes louent chacune une chambre. Quelle est la probabilité que les chambres louées soient dans trois hôtels différents ?

Exercice 3.

On réalise des épreuves indépendantes jusqu'à obtenir r succès. La probabilité d'un succès étant p. Montrer que la probabilité qu'il faille n épreuves est $C_{n-1}^{r-1}\, p^r\, (1-p)^{n-r}$.

Exercice 4.

Une classe d'étudiants en probabilité comprend 30 étudiants dont 15 sont bons, 10 moyens et 5 mauvais. Une seconde classe de même effectif compte 5 étudiants bons, 10 moyens et 15 mauvais. L'examinateur connaît cette situation, à la fin de l'année, mais ignore à quelle classe il a affaire. Il interroge un étudiant pris au hasard dans chaque classe et constate que l'étudiant de la classe A est moyen, tandis que l'autre est mauvais. Quelle est la probabilité que la classe A soit la meilleure ?

Exercice 5.

Une urne contient au départ 5 boules blanches et 7 noires. Chaque fois que l'on tire une boule, on note sa couleur, puis on la réintroduit ainsi que deux nouvelles boules de la même couleur qu'elle.

1. Quelle est la probabilité que les deux premières boules tirées soient noires, puis les deux suivantes blanches ?
2. Quelle est la probabilité que deux exactement des 4 premières boules tirées soient noires ?

Exercice 6.

Un examen est administré sous forme d'un questionnaire de 5 questions à 3 choix multiples chacune. Quelle est la probabilité qu'un étudiant obtienne 4 bonnes réponses ou plus ?

Exercice 7.

Soit une variable aléatoire X dont la densité de probabilité est :

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x^2) & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Quelle est la valeur de c ?
2. Quelle est la fonction de répartition de X ?
3. Quelles sont l'espérance mathématique et la variance de X ?

Exercice 8.

Soit X est une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda = 1$. Calculer la densité de la variable aléatoire Y définie par $Y = \ln X$.

2 Décision en univers incertain

Exercice 9. Critère de choix

La matrice suivante représente les gains d'une décision à prendre dans des conditions d'incertitude complète.

	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	5	−10	9	0
a_2	6	7	8	1
a_3	8	7	15	−2
a_4	3	4	−1	4

Déterminer les actions optimales, au sens des critères de Laplace, de Savage, du maximin, et de Hurwitz (avec un coefficient d'optimisme de 0.3).

Exercice 10. Maintenance d'un parc de n machines

Dans l'exemple de la maintenance d'un parc de n machines, nous avons montré qu'une condition nécessaire pour que la période T^* soit optimale est

$$\begin{aligned} \mathrm{E}C(T^* - 1) &\geq \mathrm{E}C(T^*) \\ \mathrm{E}C(T^* + 1) &\geq \mathrm{E}C(T^*) \end{aligned}$$

1. Montrer que cette condition est également suffisante si $p_1 < p_2 < \ldots$. Interpréter ce résultat.
2. Expliquer pourquoi la relation $p_1 > p_2 > \ldots$ n'est pas suffisante.

Exercice 11. Espérance mathématique + variance : $\min \mathrm{E}(z) + \rho \,\mathrm{var}(z)$

Dans le cours, nous avons dit que si on veut minimiser l'espérance mathématique et la variance (limitation du risque des situations aberrantes), il faut que ρ soit positif. En plus, plus on est conservateur (moins on veut de risque), plus la valeur absolue de ρ doit être grande. Pourquoi ces affirmations sont justes ?

Exercice 12. C'est la crise !

Une compagnie d'assurance doit choisir entre les trois options suivantes :

a_1 : Augmenter l'effectif commercial de 10 %.

a_2 : Maintenir l'effectif commercial inchangé.

a_3 : Diminuer l'effectif commercial de 10 %.

Selon si la situation économique est bonne (θ_1), médiocre (θ_2), ou mauvaise (θ_3), la compagnie peut avoir des pertes données par le tableau suivant

	θ_1	θ_2	θ_3
a_1	-10	-5	1
a_2	-5	-5	0
a_3	-3	-2	-1

1. Quels sont les ensembles A et Θ ? Quelle est la fonction perte ?
2. Déterminer si chaque action est admissible ou inadmissible.
3. La compagnie croit que la distribution de probabilité est $\pi(\theta_1) = 0.2, \pi(\theta_2) = 0.3, \pi(\theta_3) = 0.5$. Classer les actions dans l'ordre croissant de leurs espérances du coût de Bayes. Quelle est l'action bayesienne ?
4. Classer les actions selon le principe minimax. Quelle est l'action minimax ?

Exercice 13. Réception d'un lot

Une entreprise doit décider d'accepter (action a_1) ou non (action a_2) un lot de pièces qu'elle reçoit. Un lot peut être d'un des trois types : très bon (θ_1), acceptable (θ_2) ou mauvais (θ_3). La perte occasionnée est donnée par le tableau suivant

	θ_1	θ_2	θ_3
a_1	0	1	3
a_2	3	2	0

Les probabilités a priori sont $\pi(\theta_1) = \pi(\theta_2) = \pi(\theta_3) = 1/3$.

1. Quelle est l'action bayesienne ?
2. Quelle est l'action minimax non-randomisée ?
3. Quelle est l'action minimax randomisée ?

3 Décision stratégique

Exercice 14. Le contrôle de réception

Un assembleur s'approvisionne chez un fournisseur. Un des types de composants est livré par des lots de 50. Dans chaque lot, il peut y avoir 0, 1, 2, ou 3 pièces défectueuses. A priori, ces quatre cas sont équi-probables.

A la réception d'un lot, on peut décider de renvoyer au fournisseur ou d'accepter. Dans ce dernier cas, le lot est mis sur une chaîne que l'on ne peut pas arrêter. L'utilisation d'une pièce défectueuse peut avoir des conséquences graves. Elle implique le retour dans l'usine ou aux services après vente si le produit assemblé ne fonctionne pas. Dans tous les cas, cela provoque une somme de coûts direct ou indirect de 10 €. Par contre, si on renvoie un lot au fournisseur, on risque d'une part de retarder la production qui coûte 3 € et d'autre part on doit subir des frais si le renvoi n'est pas justifié. En effet, selon le contrat passé avec le fournisseur, à la réception d'un lot renvoyé, le fournisseur fait un test complet en présence du représentant de l'assembleur. Si le test montre qu'il y a 3 pièces défectueuses, le fournisseur s'engage à prendre en charge les frais lié au renvoi qui est estimé à 1 €. Par contre, s'il y en a moins, non seulement le fournisseur ne prend pas en charge les frais, mais il facture aussi 40 centimes d'€ pour chaque pièce testée non défectueuse. Heureusement, quel que soit le nombre de pièces défectueuses trouvées, le lot est remplacé par un autre que le fournisseur garantit de n'avoir aucune pièce défectueuse.

1. Quelle est l'action bayesienne de l'assembleur ?
2. Quelle est son action minimax non randomisée ?
3. Quelle est son action minimax randomisée ?
4. On suppose que l'assembleur peut tester un échantillon de 3 pièces à la réception. Sachant que le test d'une pièce coûte 45 centimes, reprendre les points précédents.

Exercice 15. Quand acheter ?

Une entreprise veut acheter une grande quantité de fournitures, ou bien aujourd'hui ou bien demain. Le prix d'aujourd'hui est 145 € la pièce. L'entreprise est convaincue que le prix passera, ou bien à 100 € ou bien à 200 €, de manière équi-probable. Un expert propose son service pour prédire le prix. L'entreprise sait que la prédiction de cet expert est fiable à 60%. Pour la prédiction, l'expert facture 1.5 € pour chaque pièce de fourniture achetée. Montrer que l'entreprise accepterait la prédiction de cet expert.

Exercice 16. Quoi vendre ?

La compagnie Citronus vend des ordinateurs. Elle doit décider entre trois options dans trois ans :

1. Continuer de vendre la version actuelle (Jus)
2. Vendre une version améliorée (JusPlus)
3. Vendre une machine beaucoup plus performante (SuperJus)

Une machine ne peut être lancée sur le marché que lorsque les ingénieurs R&D ont réussi. Les probabilités de réussite sont respectivement 0.9 et 0.6 pour JusPlus et SuperJus. Si aucune machine n'est réussie, la compagnie n'a d'autres choix que de continuer à vendre Jus.

Maintenant, la compagnie doit décider entre :

1. Ne fait pas de R&D sur aucune machine.
2. R&D seulement sur JusPlus avec un coût de 3 M€.
3. R&D seulement sur SuperJus avec un coût de 5 M€.
4. R&D sur les deux machines avec un coût de 8 M€.

Si les ingénieurs R&D ont réussi, les profits nets sont respectivement 2 M€ et 10 M€ pour JusPlus et SuperJus.

On vous demande de

1. Dessiner l'arbre de décision.
2. Donner votre conseil pour maximiser l'espérance du profit net.

Exercice 17. Combien stocker ?

La demande d'un article est une variable aléatoire discrète de loi uniforme comprise entre 1 et 6. Le coût de laisser une pièce en stock coûte 1 €, alors que le coût de ne pas pouvoir satisfaire une demande est de 2 €.

1. Combien de pièces faut-il posséder afin de minimiser l'espérance du coût ?
2. Quel est le prix maximal pour connaître la demande exacte en avance ?

4 Fonction d'utilité

Exercice 18. Le partage d'une fortune

Deux personnes ont une même fonction d'utilité pour une modification x de leur fortune, qui est $u(x) = x^{1/3}$, où une valeur positive de x signifie une augmentation de la fortune. Un jour, l'un d'eux reçoit comme cadeau un ticket de loterie qui donnerait soit un gain de r euro ($r > 0$), soit rien, avec la même probabilité pour chaque événement.

Montrer qu'il existe un $b > 0$ avec la propriété suivante : Quelle que soit la personne qui reçoit ce ticket, le revenue de ce ticket à l'autre personne au prix de b euro est profitable à tous les deux.

Exercice 19. Fonction d'utilité en SY05 !

Déterminer votre fonction utilité concernant la mention que vous auriez pour un cours. Six mentions sont possibles en SY05 : excellent, très bien, assez bien, satisfaisant, et passable.

Exercice 20. Relation de préférence

Soit l'ensemble des récompenses $R = \{r_1, r_2, r_3\}$ avec $r_3 \prec r_2 \prec r_1$. La fonction utilité u est telle que $u(r_3) = 0, u(r_2) = \mu, u(r_1) = 1$, avec $0 < \mu < 1$.

1. Soient $P = (p_1, p_2, p_3)$ et $Q = (q_1, q_2, q_3)$ deux distributions de probabilité sur les récompenses. Déterminer la condition pour que $P \prec Q$, en terme de $p_1, p_2, p_3,\ q_1, q_2, q_3$ et μ.
2. Supposons que $(0.3, 0.3, 0.4) \prec (0.5, 0, 0.5)$. Quelle relation doit-il y avoir entre les distributions $(0.2, 0.5, 0.3)$ et $(0.4, 0.2, 0.4)$?
   Que peut on dire sur μ ?

Exercice 21. Sa fortune est en jeu

Pour une fortune r, avec $-100 \leq r \leq 500$ €, monsieur Martin a déterminé sa fonction utilité selon l'expression

$$u(r) = 0.62 \ln(0.0004\, r + 1).$$

1. On lui offre le choix entre, d'une part un investissement qui lui rapporte 100 € de manière sûre, et d'autre part une chance de participer à un jeu où il peut gagner 500 € avec une probabilité $\frac{1}{3}$ mais aussi rien gagner avec une probabilité $\frac{2}{3}$. Que devrait-il choisir ?
2. Supposons maintenant qu'il faut payer 100 € pour participer au jeu. Que devrait-il choisir ?

5 Jeux et joueurs

Exercice 22.

L'entreprise Dufour a l'intention de diversifier en essayant de s'établir dans le marché des matériaux du bâtiment. Par son expérience passée, elle pense qu'elle peut se lancer dans la toiture. Ce marché est actuellement monopolisé par une seule compagnie. Le succès de l'opération dépend de la réserve financière que le concurrent réussirait à mobiliser en cas de guerre de prix.

Si le concurrent ne réagit pas sur l'entrée de Dufour, l'opération peut apporter un bénéfice de 20 M€. Par contre, si une guerre de prix s'impose, et que le concurrent arrive à mobiliser une réserve importante, l'opération va conduire à une perte totale de 40 M€. Si la réserve du concurrent est faible, la situation serai tout à fait l'inverse, puisque le bénéfice serai doublé pour atteindre 40 M€. Bien entendu, l'entreprise Dufour peut décider de se retirer, quand elle voit le signe d'une guerre de prix. Dans ce cas, elle perd son investissement initial de 20 M€.

Avant de se lancer, l'entreprise Dufour souhaite entendre votre conseil. Elle évalue la probabilité que le concurrent veut lancer une guerre de prix est de 0.8. La probabilité que la réserve financière est importante est de 0.45. Quel conseil donnez-vous à Dufour ?

Exercice 23.

Y a-t-il un point selle dans le jeu suivant ? Quelles sont les stratégies dominées de chacun des joueurs ?

	Joueur 2			
Joueur 1	5	-9	-13	0
	7	6	9	2
	9	2	-7	4
	8	4	15	-22

Exercice 24.

Dans le cours, nous avons vue que si $v_1 = \max_i \min_j a_{i,j}$ et $v_2 = \min_j \max_i a_{i,j}$, alors on a $v_1 \leq v_2$. Pourquoi ? Comment l'interpréter avec la signification physique de v_1 et de v_2.

Exercice 25.

Dans le cours, nous avons affirmé que si x et$y$ sont deux vecteurs respectivement de dimension m et n tels que $0 \le x_i \le 1$ pour $i = 1, 2, \ldots, m$, $0 \le y_j \le 1$ pour $j = 1, 2, \ldots, n$, $\sum_{i=1}^m x_i = 1$, et $\sum_{j=1}^n y_j = 1$, alors

$$
\begin{aligned}
\min_{y_1, y_2, \ldots, y_n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i y_j &= \min_j \sum_{i=1}^m a_{i,j} x_i \\
\min_{x_1, x_2, \ldots, x_m} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i y_j &= \max_i \sum_{j=1}^n a_{i,j} y_j
\end{aligned}
$$

Pouvez vous expliquer pourquoi ?

Exercice 26.

Trouver les stratégies optimales pour le jeux à somme nulle suivant :

$$
\begin{array}{c|ccc|}
 & & \mathbf{J}_2 & \\
\hline
\mathbf{J}_1 & 10 & 12 & 4 \\
 & 3 & 1 & 22 \\
\hline
\end{array}
$$

Déterminer l'équilibre de Nash.

6 La théorie des jeux

Exercice 27.

La matrice ci-dessous représente un jeu a deux joueurs

	Joueur 2		
Joueur 1	(7,5)	(6,12)	(14,18)
	(9,7)	(16,3)	(19,2)
	(1,3)	(4,7)	(11,18)

1. Ce jeu est-it strictement compétitif ?
2. Existe-t-il un point d'équilibre ?

Exercice 28.

Deux joueurs investissent respectivement x_1 et x_2 euro. Les utilités associées à cet investissement son respectivement

$$\begin{aligned} u_1(x_1,x_2) &= -9\,x_1^2 + 14\,x_1 - x_1x_2 \\ u_1(x_1,x_2) &= -3\,x_2^2 + 18\,x_2 - x_1x_2 \end{aligned}$$

Trouver le point d'équilibre pour ces deux investissements.

Exercice 29.

On propose le jeu suivant :

(19,20, 9)	(9,18, 7)
(5,12,17)	(9, 6,15)

(1,16,17)	(3,20,13)
(3,16,19)	(5, 4, 9)

Le premier joueur choisit entre deux lignes, le deuxième entre deux colonnes, et le troisième entre les deux tableaux.

1. Ce jeu est-it strictement compétitif ?
2. Existe-t-il un point d'équilibre ?

Exercice 30.

Dans un jeu strictement compétitif à deux joueurs, montrer que si s^1 et s^2 sont deux points d'équilibre alors $u_1(s^1) = u_1(s^2)$ et $u_2(s^1) = u_2(s^2)$

Exercice 31.

Dessiner l'arbre du jeu *dilemme des prisonniers.*

Exercice 32.

Dans le jeu suivant, le Joueur 1 choisit les lignes, et le Joueur 2 choisit les colonnes. Trouver un point d'équilibre de ce jeu.

		J. 2	
J. 1		(5,0)	(0,8)
		(2,6)	(4,5)

Exercice 33.

Considérons le jeu suivant : $S_1 = [0, 100]$, $S_2 = [0, 100]$, $u_1(s) = 25s_1 - 4s_1^2 + 15s_1s_2$, et $u_2(s) = 100s_2 - 50s_1 - s_2^2 - s_1s_2$. Quelle est la meilleurs réaction de chauque joueur ? Trouver un point d'équilibre.

Exercice 34.

Considérons le jeu suivant : $S_1 = [10, 20]$, $S_2 = [0, 15]$, $u_1(s) = 40s_1 + 5s_1s_2 - 2s_1^2$, et $u_2(s) = 50s_2 - 3s_1s_2 - s_2^2$. Quelle est la meilleurs réaction de chauque joueur ? Trouver un point d'équilibre.

Exercice 35.

	Joueur 2		
Joueur 1	(7,5)	(17,12)	(14,18)
	(9,7)	(16,8)	(19,2)
	(1,3)	(4,7)	(11,18)

1. Existe-t-il un point d'équilibre ?
2. Combien il y a de points d'équilibre ?

Exercice 36.

Un jeu unique est le suivant : $N = \{1, 2\}$, $x_1 = [0, 50]$ et $x_2 = [0, 50]$. Les utilités associées sont respectivement :

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= -10\,x_1^2 + 100\,x_1 + 10\,x_1x_2 \\ u_2(x_1, x_2) &= -15\,x_2^2 + 200\,x_2 + 10\,x_1x_2 \end{aligned}$$

1. Quel est le point d'équilibre de ce jeu ?
2. Est-il unique ?

3. En supposant que le joueur 1 choisit $x_1 = 20$, montrer comment on arrive au point d'équilibre.

Exercice 37.

Joueur 2 (colonnes) ; Joueur 1 (lignes)

(3,3)	(1,4)	(-1,2)
(4,1)	(2,2)	(-1,0)
(2,-1)	(0,-1)	(-2,-2)

1. Etudier le jeu joué une seule fois, en trouvant le point d'équilibre.
2. Supposons maintenant que ce jeu est répété deux fois, combien il y a de statégies ?

Exercice 38.

Joueur 2 (colonnes) ; Joueur 1 (lignes)

(5,9)	(5,7)	(-3,0)	(20,5)
(3,10)	(2,20)	(7,5)	(15,17)
(6,1)	(10,8)	(2,2)	(0,-5)
(0,1)	(8,-2)	(6,4)	(10,0)

1. Quel est le point d'équilibre de ce jeu non coopératif ?
2. Supposons maintenant que ce jeu est joué une infinité de fois. Pour qu"il existe un point d'équilibre parfait dans les sous-jeux à stratégies basculantes, quelles doivent être les zones des facteurs d'actualisation des joueurs ?

Exercice 39.

Un jeu unique est le suivant : $N = \{1, 2\}$, $S_1 = [0, 50]$ et $S_2 = [0, 50]$. Les utilités associées sont respectivement :

$$\begin{aligned} u_1(s) &= 100\, s_1 + 10\, s_1^2 + 10\, s_1 x_2 \\ u_2(s) &= 200\, s_2 - 15\, x_2^2 + 10\, x_1 x_2 \end{aligned}$$

1. Quel est le point d'équilibre de ce jeu ? Est-il unique ? Quelles sont les utilités au point d'équilibre
2. Quelles utilités les joueurs pourraient obtenir s'ils choisissaient $\bar{s}$ afin de maximiser $u_1(s) + u_2(s)$? Ces utilités pourraient-elles être supportées par une stratégie basculante ? Si la réponse est *oui*, quels doivent être les intervalles des facteurs d'actualisation ?

7 Problèmes multi-critères

Exercice 40.

La matrice ci-dessous représente un problème multi-critères, avec trois attributs de poids donnés, et cinq alternatives pour lesquelles les bénéfices sont donnés. Dire s'il y a des solutions qui sont dominées. Trouver l'ordre avec ce poids et dire si l'ordre change avec w_2 (initialement à 0.1) qui augmente.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	w
c_1	90	50	80	100	0	0.5
c_2	20	50	40	10	100	0.1
c_3	30	50	20	10	30	0.4

Exercice 41.

Trouver la région de Pareto pour le problème suivant

$$\begin{aligned} \min f_1(x) &= -x_1 \\ \min f_2(x) &= x_1^2 + (x_2 - 2)^2 \\ \text{avec } x &\in \{x \ : \ 2x_1 + x_2 \leq 4 \ ; \ x_1 \geq 0 \ ; \ x_2 \geq 2\} \end{aligned}$$

Exercice 42.

Trouver la région de Pareto pour le problème suivant

$$\begin{aligned} \min f_1(x) &= x^2 - 4\,x + 3 \\ \min f_2(x) &= -x \\ \text{avec } x &\in \{x \ : \ -1 \leq x \leq 6\} \end{aligned}$$

Exercice 43.

Trouver la région de Pareto pour le problème suivant

$$\begin{aligned} \min f_1(x) &= 2\,x_1 - x_2 \\ \min f_2(x) &= x_2 \\ \text{avec } x &\in \{x \ : \ x_1 + x_2 \leq 4 \ ; \ x_1 - x_2 \leq 3 \ ; \ -x_1 + x_2 \leq 2 \ ; \ x_1, x_2 \geq 0\} \end{aligned}$$